سیزدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران
تهران، دانشگاه تهران، دانشکده علوم و فنون نوین، ۱۳ تا ۱۵ اسفند ۱۳۹۲

....

توسعه روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف در دستگاه مختصات منحنی‌الخط

کاظم هجران‌فر[۱]، محیبی حاجی حسن‌پور[۲]
۱و۲- دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

چکیده

در تحقیق حاضر، روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف برای محاسبه جریان‌های سرعت‌پایین دوبعدی در دستگاه مختصات منحنی-الخط توسعه یافته و ارزیابی می‌شود. معادله شبکه بولتزمن درنظر گرفته‌شده برمبنای متغیر فشار بوده و از شبکه D2Q9 برای گسسته‌سازی سرعت‌های میکروسکوپیک استفاده شده است. برخلاف اغلب روش‌های عددی، روش طیفی به دلیل خاصیت فراگیری حل، عدم نیاز به فیلترینگ و عبارت میرایی عددی و همچنین همگرایی نمایی حل، می‌تواند امکان دستیابی به حل‌های دقیق را فراهم سازد. در این راستا، مشتقات مکانی در معادله شبکه بولتزمن با استفاده از روش طیفی هم‌مکانی چبیشف گسسته‌سازی شده است. انتگرال‌گیری زمانی در معادله شبکه بولتزمن با استفاده از روش صریح رانگ-کوتا مرتبه چهار انجام می‌پذیرد تا حلگری دقیق و پایدار در مسائل ناپایا فراهم شود. برای نشان دادن صحت و دقت حل حاضر، جریان ناپایای کوئت صفحه‌ای همراه با نگاشت، جریان کوئت استوانه‌ای پایا و ناپایا و همچنین جریان پایا در یک مجرا با انبساط تدریجی حل شده است. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف در دستگاه مختصات منحنی‌الخط می‌تواند به عنوان حلگری دقیق در جریان‌های سرعت‌پایین درنظر گرفته شود و برای ارزیابی سایر روش‌های عددی اعمال شده به معادله شبکه بولتزمن مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: *معادله شبکه بولتزمن، روش طیفی هم‌مکانی چبیشف، دستگاه مختصات منحنی‌الخط، جریان‌های سرعت‌پایین*

مقدمه

در دو دهه اخیر، روش شبکه بولتزمن (LBM) با موفقیت برای مطالعه پدیده‌های فیزیکی و شبیه‌سازی مسائل دینامیک جریان به عنوان تکنیک محاسباتی جایگزین قدرتمندی برای حلگرهای ناویر-استوکس مرسوم توسعه داده شده است. از نقطه‌نظر محاسباتی، معادله شبکه بولتزمن (LBE) هذلولی می‌باشد که می‌تواند به صورت محلی حل گردد، و به طور کارآمد روی کامپیوترهای موازی اعمال گردد. سادگی برنامه‌نویسی و سهولت لحاظ نمودن ارتباط‌های میکروسکوپیک برای مدل کردن پدیده فیزیکی مزایای دیگر LBM می‌باشد. LBM استاندارد (برخورد و انتشار) برای حل دقیق مسائل کاربردی با گرادیان‌های فشار بزرگ به دلیل تغییرات شدید چگالی سیال مناسب نمی‌باشد که به عنوان خطای تراکم-پذیری شناخته می‌شود. تلاش‌هایی زیادی برای حذف یا کاهش خطای تراکم‌پذیری در LBM برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر انجام شده که می‌توان آن‌ها را به دو دسته مجزا تقسیم کرد: روش‌های برمبنای چگالی (در این روش رابطه معادله حالت بین فشار و چگالی تغییر می‌کند) [۲،۱] و روش‌های برمبنای فشار [۴،۳]. هر دوی این روش‌ها دارای مزایا و معایبی می‌باشند. روش برمبنای چگالی برای جریان‌های چندفازی یا چند-جزیی مناسب می‌باشد و روش‌های برمبنای فشار به صورت مستقیم متغیر فشار را حل می‌کند و معادله ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر از طریق بسط چپمن-انسکوگ به‌دست می‌آید.

روش LBM استاندارد با وجود مزایای بسیاری که دارد، دارای معایبی نیز می‌باشد که می‌توان به محدود بودن آن به شبکه‌های یکنواخت متساوی الفاصله، دقت مرتبه دو، ناپایداری در رینولدزهای بالا و کاهش دقت در مدل‌سازی هندسه‌های دارای مرز منحنی اشاره کرد.

یکی از راه‌های غلبه بر معایب LBM استاندارد، حل مستقیم LBE می‌باشد. در همین راستا، در دهه اخیر تلاش‌هایی برای استفاده روش‌های عددی مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) برای حل LBE انجام شده است. تفاضل محدود (FD) [۵]، حجم محدود (FV) [۶]، المان محدود (FE) [۷] و اخیراً گالرکین ناپیوسته المان-طیفی (SEDG) [۸] روش‌های هستند که برای بهبود دقت و کارایی LBM استفاده شده‌اند.

در تحقیق حاضر، روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف (Chebyshev Collocation Spectral Lattice Boltzmann Method یا CCSLBM) برای شبیه‌سازی جریان‌های دوبعدی سرعت‌پایین در دستگاه مختصات منحنی‌الخط توسعه داده شده است. روش طیفی هم-مکانی چبیشف برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی و روش رانگ-کوتا مرتبه چهار صریح برای انتگرال‌گیری زمانی استفاده شده است. چند مسئله پایا و ناپایا برای ارزیابی دقت و کارایی روش توسعه داده‌شده بررسی شده‌اند که شامل حل ناپایای جریان کوئت صفحه‌ای همراه با نگاشت، حل پایا و ناپایا کوئت استوانه‌ای و حل پایا برای مسئله مجرا با انبساط تدریجی می‌باشد و نتایج آن‌ها با دیگر نتایج عددی و تحلیلی در دسترس مقایسه شده است.

معادلات حاکم

معادله بولتزمن حاکم بر تابع توزیع ذره f با یک زمان آرامش و با تخمین BGK به صورت زیر بیان می‌شود [۹]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+e.\nabla f=-\frac{1}{\tau}(f-f^{eq}) \qquad (۱)$$

که τ زمان آرامش برخورد بدون بعد، e سرعت ذره و f^{eq} تابع توزیع تعادلی می‌باشد. یک مدل شبکه مربعی دوبعدی با نه جهت سرعت (D2Q9) برای گسسته‌سازی معادله (۱) در پیکربندی شبکه (لتیس) استفاده می‌شود. شکل ۱، یک میدان حل برای معادله LB با تابع توزیع f_α در جهت سرعت میکروسکوپیک e_α را نشان می‌دهد. با گسسته-سازی فوق، معادله شبکه بولتزمن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+e_\alpha.\nabla f_\alpha=-\frac{1}{\tau}\left(f_\alpha-f_\alpha^{eq}\right),\ \alpha=0,1,\ldots,8 \qquad (۲)$$

که زیرنویس α جهت سرعت ذره را نشان می‌دهد. در مدل بولتزمن گسسته D2Q9، سرعت‌های میکروسکوپیک به صورت زیر داده شده است:

۱- دانشیار دانشکده مهندسی هوافضا، khejran@sharif.edu
۲- کارشناس‌ارشد ایرودینامیک

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right)\right]c & \alpha = 1,2,3,4 \\ \left[\cos\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)\right]\sqrt{2}c & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۳)$$

که $c = \Delta x / \Delta t$ سرعت انتشار ذره‌ها بین گره لتیس و نزدیک‌ترین همسایه هستند و Δx و Δt واحد طول لتیس و اندازه گام زمانی می‌باشد. سرعت انتشار مربوط به سرعت حرارتی ذره‌های سیال که توسط پارامتر سیال T_f، ثابت بولتزمن k_B و جرم ذره‌های m توسط رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{k_B T_f}{\chi^m}} \quad (۴)$$

در اینجا، χ مشخصه‌ای از مدل LB با مقدار ثابت است. برای مدل D2Q9 مقدار χ برابر $\chi = 1/3$ قرار داده می‌شود.

تابع توزیع تعادلی f^{eq} به گونه‌ای انتخاب می‌شود که معادله ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر را از طریق فرآیند بسط چپمن-انسکوگ ارضا کند. در معادله شبکه بولتزمن برمبنای فشار، تابع توزیع تعادلی به صورت زیر داده می‌شود:

$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \left[p + p_0 \left(3\frac{e_\alpha . u}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{\left(e_\alpha . u\right)^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{u.u}{c^2} \right) \right] \quad (۵)$$

که $u = (u,v)$ بردار سرعت و ضریب وزنی w_α برای مدل D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$w_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۶)$$

فشار ماکروسکوپیک p و سرعت ماکروسکوپیک u از معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$p = \sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha \quad (۷)$$

$$p_0 u = \sum_{\alpha=0}^{8} e_\alpha f_\alpha \quad (۸)$$

که $\mathrm{p}_0 = \mathrm{c}_s^2 \rho$، و ρ_0 چگالی ثابت سیال است. معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس می‌توانند از فرم تراکم‌ناپذیر مدل LB از طریق فرآیند بسط چپمن-انسکوک استخراج گردند [۱۰]:

$$\frac{1}{C_s^2}\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla u = 0 \quad (۹)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\nabla P + \nu \nabla^2 u \quad (۱۰)$$

که $\mathrm{P} = p / \rho_0$ فشار به‌هنجارشده و υ مقدار فیزیکی لزجت سینماتیکی سیال می‌باشد. زمان آرامش τ برای مدل LB تفاضل محدود از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{\nu}{C_s^2} \quad (۱۱)$$

که $c_s = c\sqrt{\chi}$ سرعت صوت مدل LB می‌باشد.

نگاشت به دستگاه مختصات منحنی‌الخط

هدف این بخش، ارائه معادلات حاکم انتقال داده‌شده به دستگاه مختصات عمومی منحنی‌الخط می‌باشد. برای این منظور، معادله حاکم (۲) با استفاده از رابطه ژاکوبین تبدیل زیر از دستگاه فیزیکی (x,y) به دستگاه محاسباتی (ξ,η) انتقال می‌یابد:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta = \frac{1}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} \quad (۱۲)$$

و متریک‌ها در رابطه فوق معادلات زیر را ارضا می‌نمایند:

$$\begin{aligned} \xi_x &= y_\eta / J \\ \xi_y &= -x_\eta / J \\ \eta_x &= -y_\xi / J \\ \eta_y &= x_\xi / J \end{aligned} \quad (۱۳)$$

انتقال مشتق‌های f_x و f_y به فضای محاسباتی، می‌تواند با استفاده از قاعده زنجیره‌ای صورت پذیرد:

$$\begin{aligned} f_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \\ f_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که با به‌کارگیری روابط (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f_x &= \left(f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi\right)/J \\ f_y &= \left(-f_\xi x_\eta + f_\eta x_\xi\right)/J \end{aligned} \quad (۱۵)$$

حال با قرار دادن روابط (۱۵) در معادله (۲)، معادله شبکه بولتزمن در دستگاه مختصات عمومی منحنی‌الخط به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial t} + c_\xi \frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial \xi} + c_\eta \frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial \eta} = -\frac{1}{\tau}\left(f_{i,j,k} - f_{i,j,k}^{eq}\right) \quad (۱۶)$$

که:

$$\begin{aligned} c_\xi &= \frac{1}{J}\left(e_x y_\eta - e_y x_\eta\right) \\ c_\eta &= \frac{1}{J}\left(e_y x_\xi - e_x y_\xi\right) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

فرآیند گسسته‌سازی

در روش چبیشف هم‌مکانی طیفی، نقاط درون‌یاب در بازه [-۱،۱]، نقاط هم‌مکانی چبیشف-گوئس-لوباتو $\xi_j = cos\left(j\pi / N\right)$ برای $j = 0,\ldots,\mathrm{N}$ که ماکزیمم مرتبه n چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n\left(\xi\right) = cos\left(n \arccos \xi\right)$ هستند تعریف می‌شود. حال به منظور انجام مشتق‌های تابع $\mathrm{u}\left(\xi\right)$ در نقاط هم‌مکانی ξ_j می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود [۱۱]:

$$\mathrm{u}^{(\mathrm{r})}\left(\xi_\mathrm{k}\right) = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_{\mathrm{kj}}^{(\mathrm{r})} \mathrm{u}(\xi_\mathrm{j}), \quad \mathrm{r} = 1,2,\ldots \quad (۱۸)$$

که $D_{kj}^{(r)}$، درایه‌های ماتریس مشتق‌گیر مرتبه r هستند. درایه‌های ماتریس مشتق‌گیر مرتبه اول و دوم می‌تواند توسط رابطه‌های زیر به‌دست آید که توسط اشنایدر و ورنر پیشنهاد شده است [۱۲]:

$$D_{kj} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_k} \dfrac{1}{\xi_k - \xi_j} & if\ k \neq j \\ -\displaystyle\sum_{i=0, i \neq k}^{N} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_k} \dfrac{1}{\xi_k - \xi_i} & if\ k = j \end{cases} \qquad (۱۹)$$

که در این رابطه:

$$\lambda_k^{-1} = \prod_{i=0, i \neq k}^{N} \left(\xi_k - \xi_i \right) \qquad (۲۰)$$

برقرار است. حال برای ماتریس مشتق گیر مرتبه دوم یعنی $D_{kj}^{(2)}$ داریم

$$D_{kj}^{(2)} = \begin{cases} 2D_{kj} \left(D_{kk} - \dfrac{1}{\xi_k - \xi_j} \right) & if\ k \neq j \\ 2\left(D_{kk}\right)^2 + 2\displaystyle\sum_{i=0, i \neq k}^{N} D_{ki} \dfrac{1}{\xi_k - \xi_i} & if\ k = j \end{cases} \qquad (۲۱)$$

استفاده از این ماتریس مشتق‌گیر سبب جلوگیری از رشد خطای گرد کردن در مسائلی می‌شود که در آن از شبکه‌های ریز استفاده می‌شود.

در حالت دوبعدی برای گسسته‌سازی در جهت ξ، تنها لازم است که سطرهای ماتریس مشتق‌گیر را در ستون‌های u ضرب کرده و برای گسسته‌سازی در جهت η نیز بایستی ستون‌های $\left(\mathrm{D}^{y}\right)^{\mathrm{T}}$ (ترانهاده ماتریس D^{y}) را در سطرهای u ضرب نمود.

حال برای انتگرال‌گیری زمانی از معادله شبکه بولتزمن، معادله (۱۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = R(f_\alpha) \qquad (۲۲)$$

$$R\left(f_\alpha\right) = -\left(e_{\alpha\xi} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi} + e_{\alpha\eta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{\tau}\left(f_\alpha - f_\alpha^{eq} \right) \qquad (۲۳)$$

سپس حل در زمان t با استفاده از روش رانگ-کوتا چهارمرحله‌ای پیشروی می‌کند. این روش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{gathered} f_\alpha^{0} = f_\alpha^{t} \\ f_\alpha^{k} = f_\alpha^{0} + \beta_k \Delta t R^{k-1}\left(f_\alpha\right), \quad k = 1,2,3,4 \end{gathered} \qquad (۲۴)$$

که پارامتر $\beta_k\ (k = 1,2,3,4)$، متناظراً دارای مقادیر $1/4$، $1/3$، $1/2$ و 1 می‌باشند. روش انتگرال‌گیری رانگ-کوتا مرتبه چهار برای محاسبه دقیق جریان‌های ناپایا مناسب می‌باشد.

شرایط مرزی

روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف نیازمند شرایط مرزی مناسب برای هر دو متغیرهای ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک می‌باشد. در معادله LB، تابع توزیع f_α به صورت مستقیم در مرزها داده نمی‌شود و باید روش خاصی برای مقادیر آن‌ها برمبنای متغیرهای ماکروسکوپیک روی هر مرز استفاده شود. برای این کار بایستی ابتدا مقادیر ماکروسکوپی با استفاده از حل معادلات ناویر-استوکس به صورت دقیق در مرزها برون‌یابی شوند. بعد از به‌روزرسانی مقادیر ماکروسکوپیک در مرزها، تابع توزیع تعادلی f^{eq} با استفاده از رابطه (۵) به‌روز می‌شود. حال برای محاسبه تابع توزیع f_α در گام زمانی جدید روی مرز، می‌توان معادله (۲۲) را به وسیله الگوریتمی مشابه برای نقاط داخلی، به‌کارگیری و اعمال نمود.

نتایج و بحث

در این بخش به ارائه و بررسی نتایج به‌دست‌آمده از حل مسائل مختلف با استفاده از روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف پرداخته خواهد شد. در ادامه، مسئله‌های جریان کوئت صفحه‌ای، جریان کوئت استوانه‌ای و جریان در مجرا با انبساط تدریجی معرفی و نتایج حاصل از حل آن‌ها ارائه و بحث می‌شود.

جریان کوئت صفحه‌ای

جریان کوئت بین دو صفحه برای نشان دادن دقت و کارایی رهیافت عددی اخیر بررسی شده است. جریان از طریق حرکت صفحه‌ی بالایی در راستای x با سرعت ثابت ($u = u_0 = \mathrm{const}, v = 0$) برقرار می‌شود. حل دقیق پروفیل سرعت برای جریان کوئت صفحه‌ای از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۳]:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{y}{H} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) exp\left(-\frac{(n\pi)^2\, vt}{H^2}\right) \qquad (۲۵)$$

که در $t = 0$ شرایط اولیه و در $t = \infty$ یا به عبارت دیگر $\mathrm{vt}/\mathrm{H}^2 = \infty$ حل پایا خواهد بود. محاسبات برای شبکه‌های محاسباتی مختلف و در رینولدز $\mathrm{Re} = \mathrm{u_0 H}/\upsilon = 10$ برای مشخص کردن دقت حل نسبت به حل تحلیلی انجام شده است. برای تولید شبکه در جهت عمود بر دیواره‌ها از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$y = \frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left[\frac{\eta + 1}{2}\tan\left(\alpha\right)\right] \qquad (۲۶)$$

که $\eta = [-1,1]$ می‌باشد و پارامتر $\alpha < \pi/2$ کشش شبکه را کنترل می‌کند [۱۴]. توجه شود که توزیع نقاط در راستای x، توزیع نقاط گوئس-لوباتو استاندارد می‌باشند. عرض بین صفحه‌ها برابر $H = 1$ انتخاب‌شده و برای حل این مسئله $u_0 = 0.0025$ قرار داده شده است. قرار دادن این مقدار کوچک u_0 نسبت به سرعت صوت $c_s = 0.577$ امکان حل دقیق را فراهم می‌سازد. توزیع نقاط برای ضرایب مختلف کشش شبکه را می‌توان در شکل ۲ مشاهده نمود. همان طور که در شکل نیز دیده می‌شود و مطابق آنچه که قبلاً گفته شد با افزایش مقدار ضریب کشش شبکه و نزدیک کردن آن به مقدار $\pi/2$، تجمع نقاط در نزدیکی $y = H$ بیشتر می‌شود و چنانچه به مقدار صفر نزدیک شود توزیع نقاط به گوئس-لوباتو نزدیک می‌شود. در شکل ۳ پروفیل سرعت به‌دست‌آمده برای ضریب کشش شبکه ۱/۲ آورده شده و مشاهده می‌شود که نتایج با حل دقیق مطابق کامل دارند. این نتایج برای $\mathrm{vt/H^2} = 0.01, 0.04, 0.1, 0.2, 0.5$ نمایش داده‌شده است.

جریان کوئت استوانه‌ای

مسئله بعدی درنظر گرفته شده، جریان بین دو استوانه با شعاع‌های r_1 و r_2 ($r_2 > r_1$) می‌باشد (جریان کوئت استوانه‌ای). در این مسئله، در زمان $t < 0$ سیال ساکن می‌باشد. استوانه خارجی با سرعت ناگهانی u_0 در

زمان $t \geq 0$ شروع به حرکت می‌کند. اگرچه سرعت مماسی در جهت θ یکنواخت است ولی مؤلفه‌های سرعت کارتزین (u_x, u_y) و تابع توزیع f_i در جهت θ یکنواخت نمی‌باشد. به منظور اعمال دقیق شرایط مرزی، در جهت θ، شرایط مرزی تناوبی اعمال شده و بنابراین $\partial f_i / \partial \xi$ به صورت تناوبی محاسبه می‌شود. در هر دو جهت زاویه‌ای (ξ) و شعاعی (η) از توزیع نقاط چبیشف-گوئس-لوباتو استفاده شده است. پارامترهای فیزیکی مورد استفاده برای شبیه‌سازی جریان، $r_1 = 4$ ، $r_2 = 8$ ، $Re = U\left(r_2 - r_1\right)/\upsilon = 10$ و $u_0 = 0.01$ می‌باشد. شبکه تولیدشده برای این هندسه را می‌توان در شکل ۴ مشاهده نمود. همانطور که مشاهده می‌شود به دلیل استفاده از توزیع نقاط گوئس-لوباتو، توزیع نقاط در نزدیکی دیواره‌ها و خط تناوبی دارای تجمع بیشتری است. سرعت $u_0 = 0.01$ است که در مقایسه با سرعت صوت C_s کوچک می‌باشد. برای $N_x = N_y = 20$ می‌توان حل ناپایای جریان کوئت استوانه‌ای را در زمان‌های بی‌بعد مختلف $\upsilon t / H^2$ در شکل ۵ مشاهده نمود. همان طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج حل معادله ناویر-استوکس [۱۴] و نتایج حاضر به روش CCSLBM وجود دارد.

برای جریان کوئت استوانه‌ای پایا، رابطه ساده‌ای برای حل دقیق سرعت زاویه‌ای مطابق معادله زیر وجود دارد:

$$\frac{u_\theta}{u_0} = \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\left(\frac{r}{r_1} - \frac{r_1}{r}\right) \quad (۲۷)$$

نمودار سرعت زاویه‌ای حالت پایا را می‌توان در نقاط هم‌مکانی در شکل ۶ مشاهده نمود. مشاهده می‌شود که این حل نیز با حل پایای تحلیلی تطابق خوبی دارد. همچنین بردارهای سرعت نیز برای این حالت پایا در شکل ۷ نشان داده شده است.

جریان مجرا با انبساط تدریجی

مسئله جریان آرام در یک مجرا با انبساط تدریجی در پنجمین گردهمایی IAHR [۱۵] به عنوان یک مورد آزمایش درنظر گرفته شده که هندسه و شرایط مرزی این مسئله در شکل ۸ ارائه شده است. در این مسئله، دیواره پایینی مجرا $y_1(x)$، وابسته به عدد رینولدز دارای فرمی به شکل زیر می‌باشد:

$$y_1(x) = -\left[1 + f(x)\right]; \qquad f(x) = \frac{\left[\tanh(2) - \tanh\left(2 - 30x / Re\right)\right]}{2} \quad (۲۸)$$

که $0 \leq x \leq x_{out} = Re/3$ می‌باشد. توجه شود که $y = 0$ صفحه تقارن هندسه می‌باشد. شرط مرزی ورودی در $x = 0$ به صورت عبارت‌هایی از مؤلفه‌های سرعت کارتزین داده شده است:

$$u = \frac{3}{2} u_0 \left(1 - y^2\right); \quad v = 0 \quad (۲۹)$$

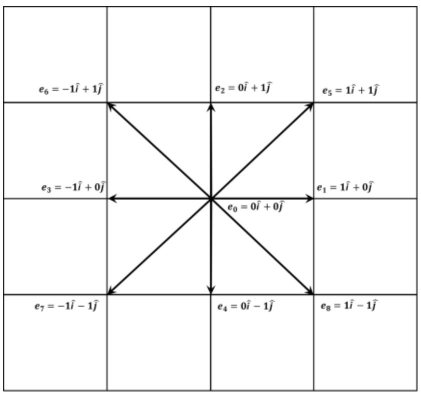
شرط مرزی عدم لغزش برای دیواره فرض و اعمال شده است. همچنین در خروجی مجرا نیز شرایط $\partial u / \partial x = \partial v / \partial x = 0 \ , \ p = const.$ استفاده شده است. محاسبات در رینولدز ۱۰۰ و در جایی که عدد رینولدز به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$Re = \frac{u_0\left[y\left(N_x, N_y\right) - y\left(N_x, 0\right)\right]/2}{\upsilon} \quad (۳۰)$$

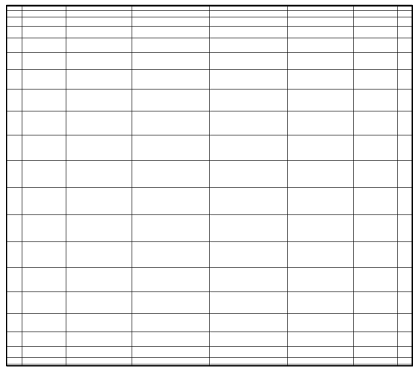
انجام می‌پذیرد. در واقع طول مرجع در اینجا نصف طول مقطع خروجی مجرا می‌باشد. در اینجا از سرعت مشخصه $u_0 = 0.1$ و همچنین شبکه 20×41 استفاده شده که این شبکه ایجاد شده در شکل ۹ قابل مشاهده است. خطوط جریان برای این مسئله در شکل ۱۰ نشان داده شده که از نکات آن می‌توان به وجود دو گردابه در دیواره‌های بالایی و پایینی اشاره نمود. نتایج برای توزیع تاوایی (Vorticity) در طول دیواره در شکل ۱۱ آورده شده است و همانطور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین حل حاضر با سایر نتایج عددی دارد. این موضوع بیانگر این حقیقت است که روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف می‌تواند به هندسه‌های نسبتاً پیچیده نیز با موفقیت اعمال شود و نتایج به‌دست‌آمده با حلگرهای ناویر-استوکس هم‌خوانی خوبی دارند.

نتیجه‌گیری

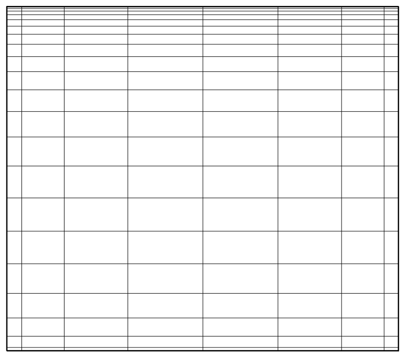
در تحقیق حاضر، روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف در دستگاه مختصات منحنی‌الخط توسعه یافته و برای حل جریان‌های ناپایا/پایای مختلف به‌کار گرفته شده است. برای این منظور، مشتقات مکانی در معادله شبکه بولتزمن با استفاده از روش طیفی هم‌مکانی چبیشف گسسته‌سازی شده و انتگرال‌گیری زمانی نیز با استفاده از روش صریح رانگ-کوتا مرتبه چهار انجام شده تا حلگری دقیق و پایدار جهت تحلیل جریان سرعت‌پایین فراهم شود. عدم نیاز به هر نوع فیلترینگ و عبارات میرایی عددی برای پایداری حل از ویژگی اصلی کار حاضر می‌باشد که امکان شبیه‌سازی دقیق جریان را فراهم می‌سازد. نتایج به‌دست‌آمده برای مسائل مختلف شبیه‌سازی‌شده حاکی از آن است که این روش برای تحلیل و بررسی جریان‌های سرعت‌پایین بسیار کارآ و دقیق بوده و می‌تواند جایگزین مناسبی برای حلگرهای ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر مرتبه بالا باشد. همچنین، نتایج حاصل از الگوریتم حل حاضر می‌تواند مبنایی برای ارزیابی نتایج سایر روشهای عددی اعمال‌شده به معادله شبکه بولتزمن باشد.



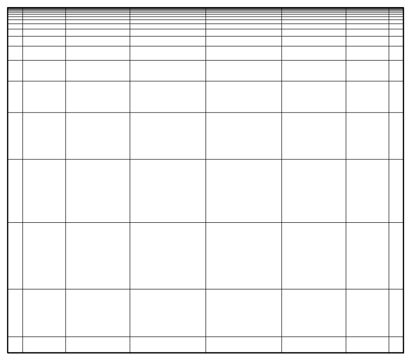
شکل ۱ شبکه D2Q9 و سرعت‌های میکروسکوپیک.



(الف)

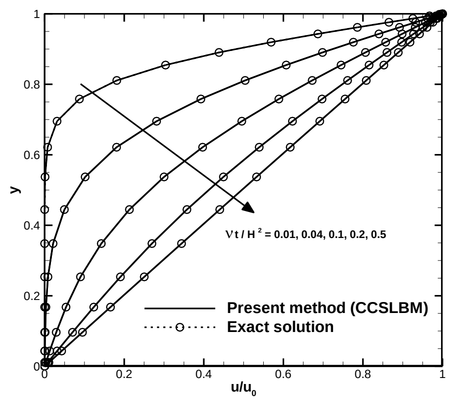


(ب)

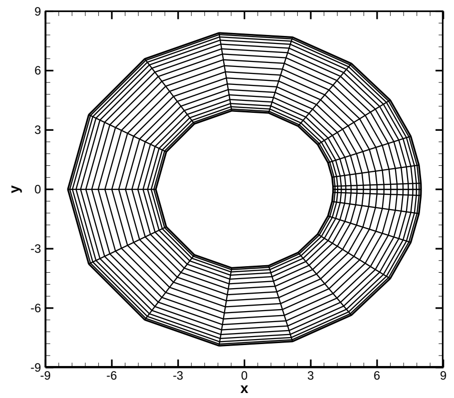


(ج)

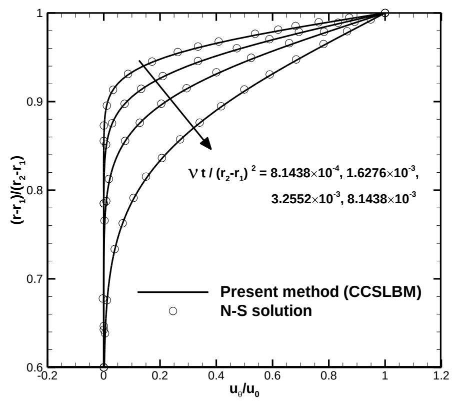
شکل ۲ توزیع نقاط شبکه‌های ایجادشده برای $N_y = 22$ به ترتیب از بالا به پایین با ضرایب انبساط $\alpha = 0.7$، $\alpha = 1.2$ و $\alpha = 1.5$.



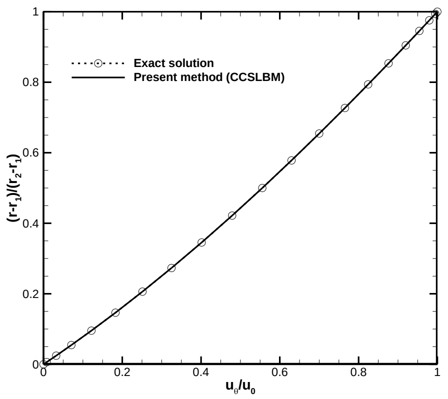
شکل ۳ مقایسه پروفیل سرعت u برای جریان کوئت صفحه‌ای با **Re=10**، $\mathbf{u}_0 = 0.0025$ و 9×23 در نقاط گوئس-گوباتو.



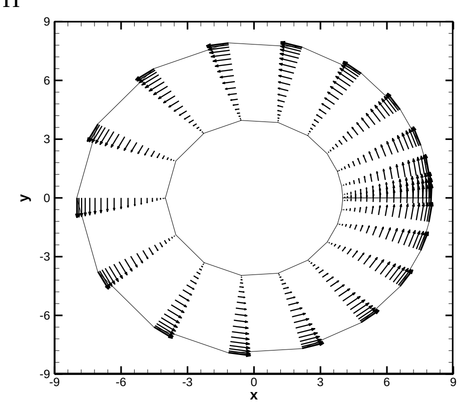
شکل ۴ شبکه ایجادشده برای جریان کوئت استوانه‌ای در $N_x = N_y = 20$.



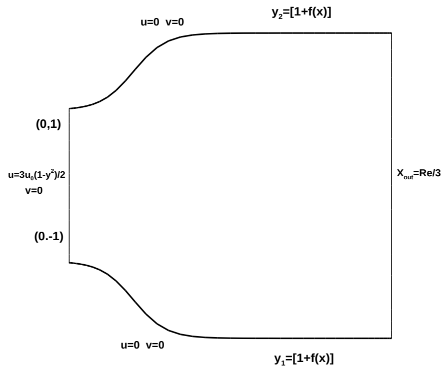
شکل ۵ مقایسه توزیع پروفیل سرعت جریان کوئت استوانه‌ای ناپایا در زمان‌های متفاوت برای $N_x = N_y = 20$.



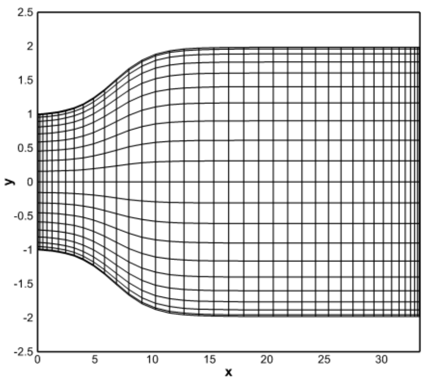
شکل ۶ مقایسه توزیع سرعت زاویه‌ای برای جریان کوئت استوانه‌ای پایا در راستای شعاعی برای $N_x = N_y = 20$ و در $\frac{\nu t}{H^2} = 0.5$.



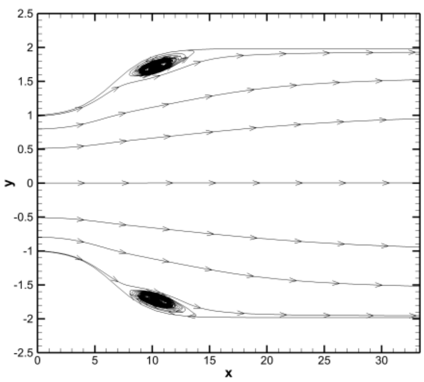
شکل ۷ بردارهای سرعت برای جریان پایای کوئت استوانه‌ای.



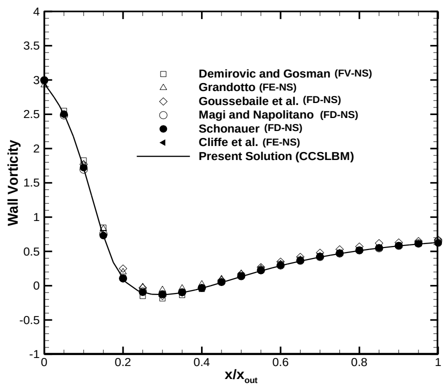
شکل ۸ هندسه و شرایط مرزی در مسئله مجرا با انبساط تدریجی.



شکل ۹ شبکه ایجادشده برای مسئله مجرا با انبساط تدریجی برای رینولدز ۱۰۰.



شکل ۱۰ خطوط جریان در مسئله مجرا با انبساط تدریجی برای رینولدز ۱۰۰.



شکل ۱۱ توزیع تاوایی در طول دیواره‌ی مجرا برای رینولدز ۱۰۰ و مقایسه با سایر نتایج

مراجع

1. Marconi S., Chopard B., and Latt J., Reducing the compressibility of a lattice Boltzmann fluid using a repulsive force, *Modern Physics C*, v. 14, n. 8, 2003, pp. 1015-1026.
2. Fang H.P., Wan R.Z., and Lin Z.F., Lattice Boltzmann model with nearly constant density, *Physical Review E*, v. 66, n. 036314, 2002, pp. 1-4.
3. Guo Z.L., Shi B., and Wang N., Lattice BGK model for incompressible Navier-Stokes equation, *Computational Physics*, v. 165, n. 1, 2000, pp. 288-306.
4. Chen Y., and Ohashi H., Lattice-BGK Methods for Simulating Incompressible Fluid Flows, *Modern Physics C*, v. 8, n. 4, 1997, pp. 793-803.
5. Fu S. C., So R. M. C., and Leung W. W. F., Stochastic finite difference lattice Boltzmann method for steady incompressible viscous flows, *Computational Physics*, v. 229, n. 1, 2010, pp. 6084–6103.
6. Patil V., and Lakshmisha K. N., Finite volume TVD formulation of lattice Boltzmann simulation on unstructured mesh, *Computational Physics*, v. 228, n. 1, 2009, pp. 5262–5279.
7. Li Y., LeBoeuf E. J., and Basu P. K., Least-squares finite-element scheme for the lattice Boltzmann method on an unstructured mesh, *Physical Review E*, v. 72, n. 046711, 2005.
8. Min M., and Lee T., A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows, *Computational Physics*, v. 230, n. 1, 2011, pp. 245–259.
9. Mei R., Luo L., and Shyy W., An Accurate Curved Boundary Treatment In the Lattice Bltzmann Method, *Computational Physics*, v. 155, n. 2, 1999, pp. 307-330.
10. Zou Q., Hou S., Chen S., and Doolen G.D., An improved incompressible lattice Boltzmann model for time-independent flows, Statistical Physics, v. 81, n. 2, 1995, pp. 35-48.
11. Darvishi M.T., Spectral Collocation Method and Darvishi's Preconditioning for Tchebyshev-Gauss-Lobatto Points, *International Mathematical Forum*, v. 2, n. 6, 2007, pp. 263-272.
12. Schneider C., and Werner W., Some new aspects of rational interpolation, *Math. Comp.*, v. 47, n. 175, 1986, pp. 285–299.
13. White F.V., *Viscous Fluid Flow*, 3th ed., McGraw-Hill, New York, 2006.
14. Mei R., and Shyy W., On the Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Method in Curvilinear Coordinate, *Computational Physics*, v. 143, n. 2, 1998, pp. 426-448.
15. Napolitano M., and Orlandi P., Laminar Flow in a Complex Geometry: a Comparision, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, v. 5, n. 1, 1985, pp. 667-683.
16. Guerrero J.S.P., Quaresma J.N.N., and R.M. Cotta, Simulating of Laminar Flow Inside Ducts of Irregular Geometry Using Integral Transforms, *Computational Mechanics*, v. 25, n. 2, 2000, pp. 413-420.